Vektorių algebros faktai.

Žymėjimai

1. Vektorius žymėsime raidėmis riebiu šriftu:

   $$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v}$$

   rašydami ranka arba ant lentos, vektorius žymėsime rodyklyte virš raidės:

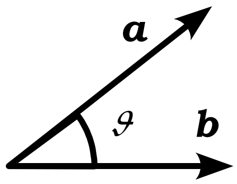
   $$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$$

2. Raidė paprastu šriftu reikš vektoriaus ilgį, kurį taip pat žymėsime modulio ženklu:

   $$a=|\boldsymbol{a}|$$

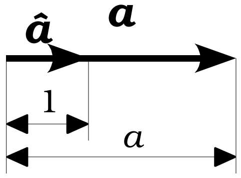
3. Kampas tarp dviejų vktorių:

   $$\vartheta=\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$$



4. Vektorius su „kepurėle“ yra vienetinio ilgio vektorius, rodantis ta pačia kryptimi kaip ir paprastas ta pačia raide pažymėtas vektorius:

   $$\hat{\boldsymbol{v}}\|\boldsymbol{v},\ \ |\hat{\boldsymbol{v}}|\equiv 1,\ \ \boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{v}}\geqslant 0$$



Vektorinė erdvė

1. Visų vektorių aibė sudaro vektorinę erdvę *V*; Vektorius galime sudėti, kiekvienam vektoriui egzistuoja priešingas vektorius, egzistuoja nulinis vektorius:

   $$\forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V:\ \ \boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$$
   $$\exists\,\boldsymbol{0}\in V:\ \ \forall\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=V$$
   $$\forall\,\boldsymbol{a}\in V:\ \exists(-\boldsymbol{a})\in V:$$
   $$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

2. Vektorių sudėtis yra komutatyvi:

   $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\ \ (\forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V)$$

3. Vektorius galime dauginti iš skaičių:

   $$\forall\,\lambda\in\mathbb{C}:\ \ \forall\,\boldsymbol{v}\in V:\ \exists(\lambda\,\boldsymbol{v}):\ (\lambda\,\boldsymbol{v})\in V$$

4. Galioja šios vektorių daugybos taisyklės (λ ir μ yra skaičiai):

   $$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\,\boldsymbol{a}+\lambda\,\boldsymbol{b}$$
   $$(\lambda+\mu)\,\boldsymbol{a}=\lambda\,\boldsymbol{a}+\mu\,\boldsymbol{a}$$
   $$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ \ \text{(nulinis vektorius)}$$

Bazė

1. Trimatėje erdvėje trys nekomplanarūs vektoriai sudaro bazę:

   $$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}},\ \hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}},\ \hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{3}}:$$
   $$\forall\,i\neq j:\ \ \neg(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}\|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}})$$

2. Bet kurį vektorių galime išskaidyti bazės vektoriais:

   $$\boldsymbol{v}=v_x\,\hat{\boldsymbol{x}}+v_y\,\hat{\boldsymbol{y}}+v_z\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

3. Vektorių galime apibrėžti, nurodę jo komponentes bazėje

   $$\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$$

4. Vektoriaus ilgis ortonormuotoje bazėje:

   $$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

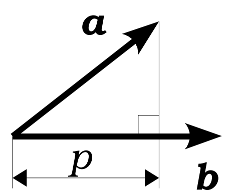
Skaliarinė ir vektorinė sandauga

1. Skaliarinė sandauga yra skaičius (skaliaras):

   $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}=a\,b\cos\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$$

2. Vektoriaus $\boldsymbol{a}$ projekcija į vektoriaus $\boldsymbol{b}$ krypti gali būti išreikšta skaliarine sandauga:

$$p=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{b}=\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{b}}=a\cos\widehat{\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{b}}}$$



3. Skaliarinė sandauga komutatyvi:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$$

4. Kitos skaliarinės sandaugos savybės:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$
$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=a^2$$

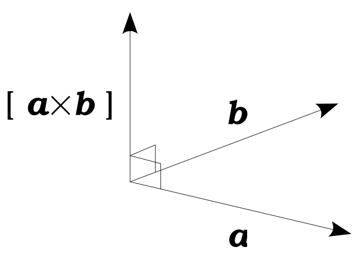
5. Skaliarinė sandauga ortonormuotose koordinatėse:

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

Vektorinė sandauga

1. Vektorinė sandauga yra vektorius, statmenas abiem dauginamiesiems:

$$\|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\|=a\,b\,\sin\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$$
$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\perp\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\perp\boldsymbol{b}$$



2. Vektorinę sandaugą galime suskaičiuoti iš koordinačių, naudodami tokį „determinantą“:

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

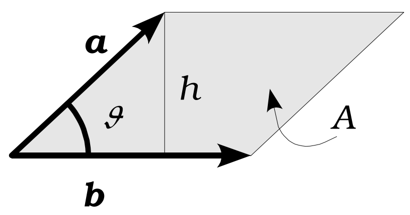
3. Vektoriai $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ir $\boldsymbol{c}$ sudaro dešiniąją sistemą (dešiniosios rankos taisyklė).

4. Vektorinė sandauga antikomutatyvi:

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}]$$

5. Vektorinė $\boldsymbol{a}$ ir $\boldsymbol{b}$ sandauga duoda lygiagretainio, apibrėžto vektoriais $\boldsymbol{a}$ ir $\boldsymbol{b}$, plotą:

$$A=h\,b=a\,b\,\sin\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}$$
$$h=a\sin\widehat{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}=a\,\sin\vartheta$$



Triguba sandauga

1. Trijų vektorių triguba sandauga apibrėžiama, naudojant skaliarinę ir vektorinę sandaugas:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\equiv(\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}])$$

2. Vektorius triguboje sandaugoje galime cikliškai „pastumti“:

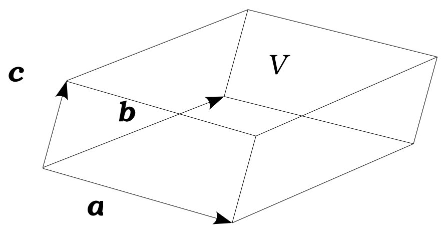
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

3. Sukeitus du daugiklius vietomis, triguba sandauga keičia ženklą:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$$

4. Triguba sandauga duoda gretasienio, apibrėžto trimis vektoriais, tūrį:

$$V=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$



Dviguba vektorinė sandauga

1. Teisinga ši formulė:

$$[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$